4.42 人工衛星の軌道特性

新　羅　一　郎

Some Characteristics of the Orbit of Artificial Satellite

Itirō SINRA

Synopsis

The orbits of artificial satellite were analyzed and specified by non-dimensional parameters at rocket burnout. The significance of its period of revolution was clarified. So, the major-axis of orbit and energy of satellite were tabulated as function of period.

1. は し が き

人工衛星の軌道については，いまさらここで数え上げる必要もないほど，すでに多くの論文が書かれている。しかし軌道の特性を表にしておくのも重宝なことだろうし，また，後で述べるように，特性の一つとしてその周期に重点を置いた見方というのも便利であろうと思えるので，あえて一文を草する。

2. 運 動 の 解 析

第一近似として，物体には一つの質量からの万有引力だけが働くと考える。すなわち，空気抗力や地球の球形からの偏差などは無視して取り扱かう。

そうすると問題は全く古典的で，あまりにも周知の事柄であるが，いちおう順を追つて書きしるしておこう。

地球中心を原点とした曲座標を使えば，運動方程式は

$$\begin{cases} \ddot{r}-r\dot{\theta}^2=-k/r^2 & \cdots\cdots(1) \\ r^2\dot{\theta}=h & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

ここに k は普遍常数，h は積分常数であつて，

$$k=\gamma M \quad\cdots\cdots(3)$$

である。ただし γ は万有引力常数，M は地球質量。

(2) を (1) に入れて θ を消去し，一回積分すると

$$\frac{1}{2}\left(\dot{r}^2+\frac{h^2}{r^2}\right)-\frac{k}{r}=C. \quad \cdots\cdots(4)$$

したがつて

$$\dot{r}=\pm\sqrt{2C+\frac{2k}{r}-\frac{h^2}{r^2}} \quad \cdots\cdots(5)$$

$\dot{r}=\frac{dr}{d\theta}\frac{h}{r^2}$ の関係を使つて t を θ に変え，積分を行うと

$$\theta=\pm\int\frac{h\,dr}{r^2\sqrt{2C+\frac{2k}{r}-\frac{h^2}{r^2}}}$$

$$=\mp\int\frac{dx}{\sqrt{p^2-x^2}} \quad \cdots\cdots(6)$$

ここに

$$x=\frac{1}{r}-\frac{k}{h^2},\quad p^2=\frac{k^2}{h^4}+\frac{2C}{h^2} \quad \cdots\cdots(7)$$

故に

$$\theta+\varphi=\pm\cos^{-1}\frac{x}{p}$$

あるいは

$$x=p\cos(\theta+\varphi)$$

r に戻せば

$$\frac{1}{r}=\frac{k}{h^2}+p\cos(\theta+\varphi)$$

あるいは

$$r=\frac{h^2}{k}\,\frac{1}{1+\frac{ph^2}{k}\cos(\theta+\varphi)}$$

$$=\frac{l}{1+e\cos(\theta+\varphi)} \quad \cdots\cdots(8)$$

ここに

$$l=\frac{h^2}{k},\quad e=\frac{ph^2}{k}=\sqrt{1+\frac{2Ch^2}{k^2}} \quad \cdots\cdots(9)$$

なお (4) から

$$2C=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2-\frac{2k}{r}=v^2-\frac{2k}{r}$$

$$=v_0^2-\frac{2k}{r_0} \quad \cdots\cdots(10)$$

である。ただし，v_0, r_0 はそれぞれ v および r の初期値。

r と t との関係は，(5) を積分すれば得られる。

3. 初 期 条 件

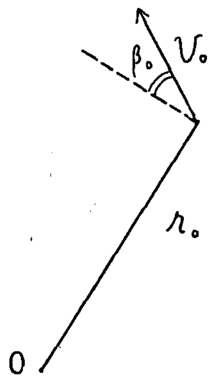
初期条件として，距離 r_0 において，速さを v_0，動径ベクトルに直角な方向（水平方向）と速度とのなす角を β_0 とする。

無次元因子 X を次のように導入して，積分のために現われた常数を変形しておこう。

$$X=\frac{r_0 v_0^2}{k} \quad \cdots\cdots(11)$$

$$\left.\begin{aligned} h^2 &= r_0^2 v_0^2 \cos^2\beta_0 = k r_0 X \cos^2\beta_0 \\ C &= \frac{k}{2r_0}(X-2) \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(12)$$

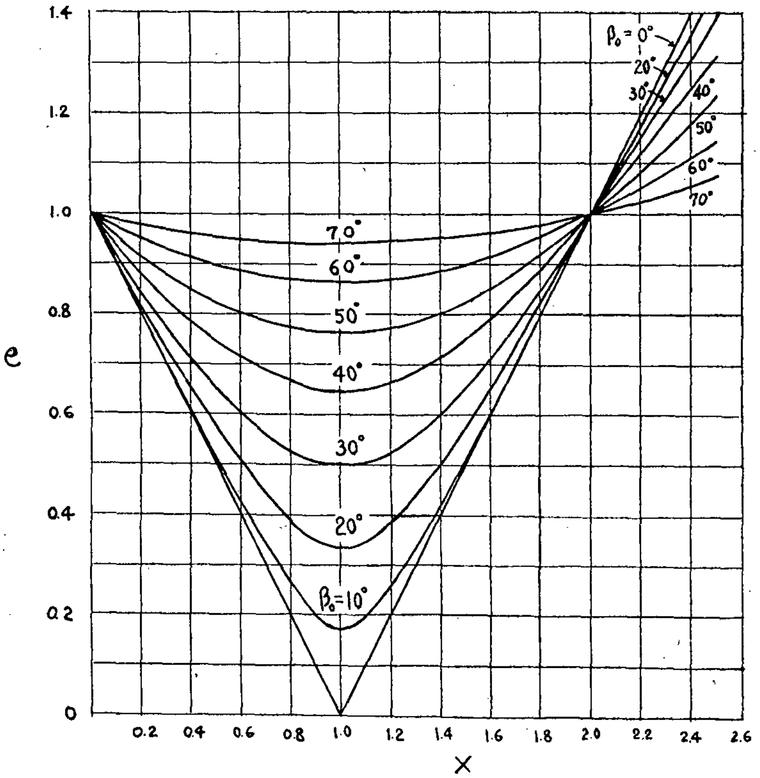
$$\left.\begin{aligned} e^2 &= 1+X(X-2)\cos^2\beta_0 \\ l &= r_0 X \cos^2\beta_0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(13)$$



第 1 図

なお (8) から，$\theta=0$ として

$$1+e\cos\varphi=\frac{l}{r_0}=X\cos^2\beta_0$$



第 2 図

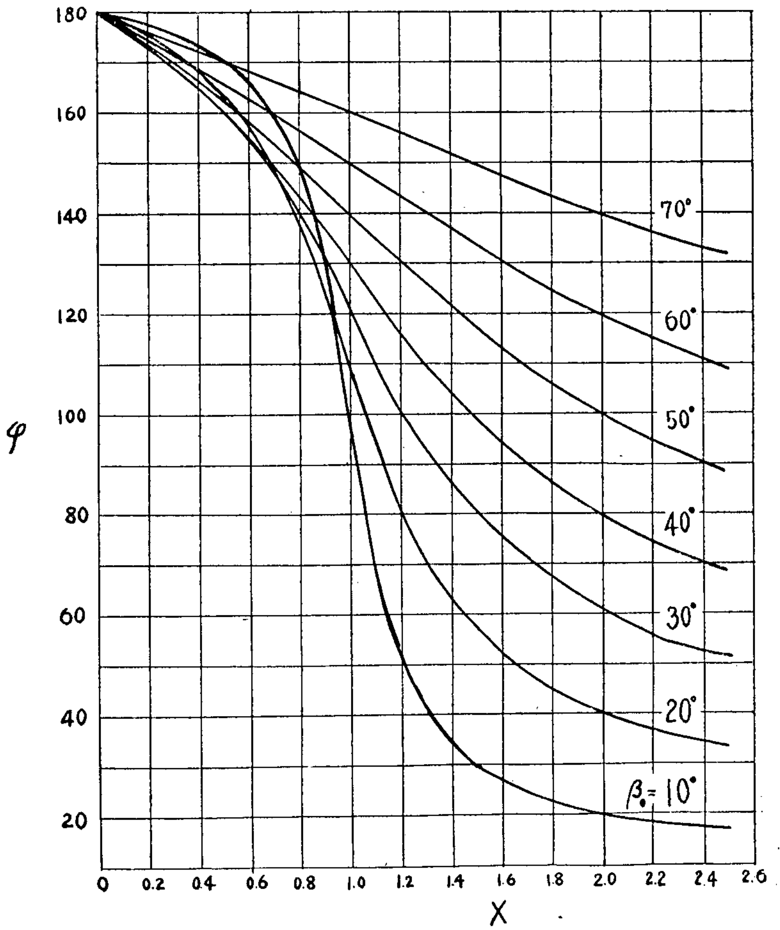
$$\therefore \quad \cos\varphi = \frac{X\cos^2\beta_0 - 1}{e}$$

$$\therefore \quad \sin^2\varphi = \frac{e^2 - (X\cos^2\beta_0 - 1)^2}{e^2} = \frac{X^2\cos^2\beta_0\sin^2\beta_0}{e^2}$$

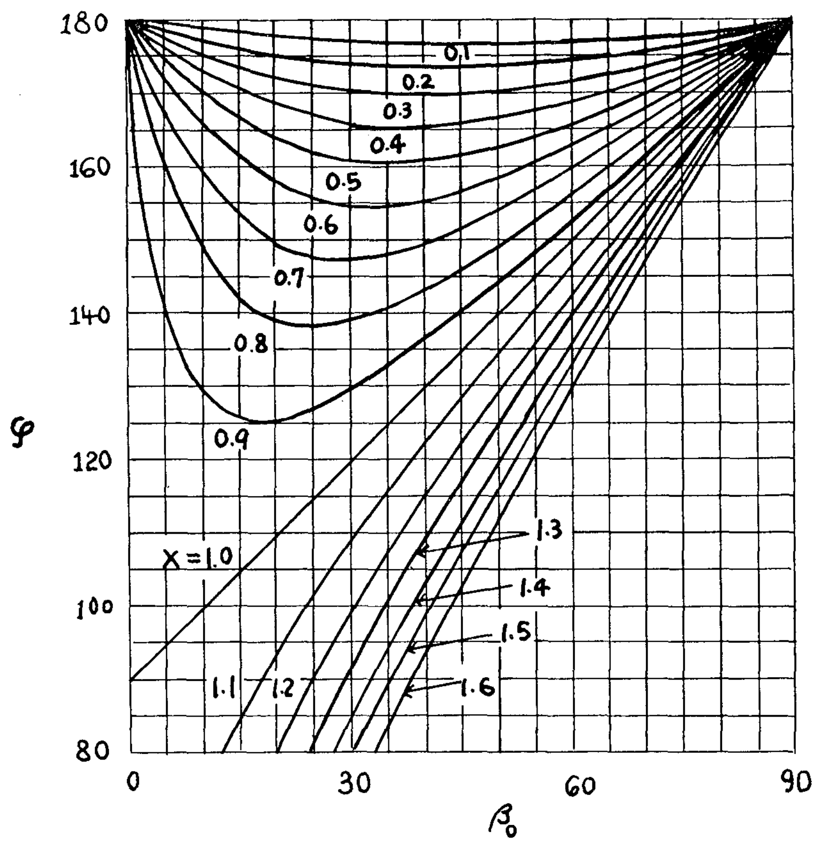
したがつて

$$\tan\varphi = \frac{X\sin\beta_0\ \cos\beta_0}{X\cos^2\beta_0 - 1} \quad \cdots\cdots (14)$$

第2図に e，第3図と第4図に φ の曲線を描いておいた。



第 3 図



第 4 図

4. 遠地点，近地点および周期

楕円軌道を考えて，その遠地点距離を r_a, 近地点距離を r_p としよう。$\theta=\pi-\varphi$ が前者を，$\theta=-\varphi$ が後者を与える。

$$\frac{r_a}{r_0}=\frac{l}{r_0(1-e)}=\frac{X\cos^2\beta_0}{1-e} \quad\cdots\cdots(15)$$

$$\frac{r_p}{r_0}=\frac{l}{r_0(1+e)}=\frac{X\cos^2\beta_0}{1+e} \quad\cdots\cdots(16)$$

したがつて，楕円の長半径を a，短半径を b とすれば

$$\frac{a}{r_0}=\frac{r_a+r_p}{2r_0}=\frac{X\cos^2\beta_0}{1-e^2}=\frac{1}{2-X} \quad\cdots\cdots(17)$$

$$\frac{b}{r_0}=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{r_0}=\sqrt{\frac{X}{2-X}}\cos\beta_0 \quad\cdots\cdots(18)$$

a は r_0 と X だけで定まり，β_0 には関係しない。

周期 T は，h が面積速度の2倍であることから容易に求められる。すなわち

$$T^2=\left(\frac{2\pi ab}{h}\right)^2=\frac{4\pi^2 r_0^3}{k(2-X)^3}=\frac{4\pi^2}{k}a^3 \quad\cdots\cdots(19)$$

T も r_0 と X だけの函数で，β_0 には無関係になる。

なお (10)，(12)，(17) を組合わせて

$$2C=-\frac{k}{a} \quad\cdots\cdots(20)$$

$$v^2=\frac{2k}{r}+2C=k\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \quad\cdots\cdots(21)$$

という関係も直ちに導かれる。

(15) と (16) を (17) で割れば

$$\left.\begin{aligned}\frac{r_a}{a}&=1+e\\ \frac{r_p}{a}&=1-e\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(22)$$

が得られるし，(15) を (16) で割れば

$$\frac{r_a}{r_p}=\frac{1+e}{1-e} \quad\cdots\cdots(23)$$

が出て来る。

地球中心からの距離の代りに，地表からの高さをとり，遠地点までの高さを H_a，近地点までの高さを H_p とすると，(23) から

$$\frac{H_a+R}{H_p+R}=\frac{1+e}{1-e}$$

ただし R は地球半径。これを変形すれば

$$\frac{H_a}{H_p}=\frac{1+e}{1-e}+\frac{2e}{1-e}\frac{R}{H_p} \quad\cdots\cdots(24)$$

R/H_p が 20 前後の大きな値を持つているので，e が余程小さくない限り，この第2項は第1項より大きくなつて，円に近く見える軌道でも，その H_a と H_p との比は大きな値をとり得る。H_p をそれぞれ 200 km, 300 km, 400 km にとつたときの H_a/H_p を第1表に示した。a/b は楕円の長半径と短半径との比である。

第 1 表

e	$\frac{1+e}{1-e}$	$\frac{a}{b}$	H_a/H_p		
			H_p=200 km	H_p=300 km	H_p=400 km
0.05	1.105	1.000	4.46	3.34	2.78
0.10	1.222	1.005	8.30	5.94	4.76
0.15	1.353	1.011	12.60	8.85	6.98
0.20	1.500	1.021	17.43	12.12	9.47

5. エネルギーについて

(10) からわかるように C はエネルギーを表わす。しかし，位置エネルギーとしては，無

限遠点を基準にしないで，地表の値を零とした方が見やすいことが多い。そのときは，単位質量当りの位置エネルギー E_p は

$$E_p=\frac{k}{R}-\frac{k}{r} \qquad \cdots\cdots(25)$$

で与えられる。したがつて，単位質量当りの全エネルギー E は

$$E=\frac{v^2}{2}+E_p=\frac{k}{R}+C$$

$$=\frac{k}{R}-\frac{k}{2a}=\frac{k}{R}\left(1-\frac{R}{2a}\right) \qquad \cdots\cdots(26)$$

なお，$a=R$ としたときの周期を T_R とすれば，

$$T_R^2=\frac{4\pi^2}{k}R^3 \qquad \cdots\cdots(27)$$

だから，

$$\left(\frac{T}{T_R}\right)^2=\left(\frac{a}{R}\right)^3 \qquad \cdots\cdots(28)$$

これを使えば

$$\frac{ER}{k}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{T_R}{T}\right)^{2/3} \qquad \cdots\cdots(29)$$

を得る。

T が与えられれば a も E も定まるので，それを第2表に示した。ただしその場合に，

$$\left.\begin{aligned}\gamma &=6.670\times10^{-8} && \mathrm{cm^3/g\cdot sec^2}\\ M&=5.975\times10^{27} && \mathrm{g}\\ R&=6371 && \mathrm{km}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(30)$$

とした。したがつて

$$\left.\begin{aligned}k&=3.985\times10^5 && \mathrm{km^3/sec^2}\\ \sqrt{\frac{k}{R}}&=7.909 && \mathrm{km/sec}\\ T_R&=84.35 && \mathrm{min}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(31)$$

である。

第 2 表

T (min)	a (km)	$a-R$ (km)	E (kcal/g)	T (min)	a (km)	$a-R$ (km)	E (kcal/g)
86	6453	82	7.57	93	6799	428	7.95
87	6503	132	7.63	94	6848	477	8.00
88	6553	182	7.69	95	6897	526	8.05
89	6603	232	7.74	96	6945	574	8.10
90	6652	281	7.80	97	6993	622	8.14
91	6701	330	7.85	98	7041	670	8.19
92	6750	379	7.90	99	7089	718	8.24

T (min)	a (km)	$a-R$ (km)	E (kcal/g)	T (min)	a (km)	$a-R$ (km)	E (kcal/g)
100	7137	766	8.28	118	7969	1598	8.98
101	7184	813	8.33	119	8014	1643	9.01
102	7231	860	8.37	120	8059	1688	9.04
103	7278	907	8.41	121	8103	1732	9.07
104	7325	954	8.45	122	8148	1777	9.10
105	7372	1001	8.50	123	8192	1821	9.14
106	7419	1048	8.54	124	8237	1866	9.17
107	7466	1095	8.58	125	8281	1910	9.20
108	7513	1142	8.62	126	8325	1954	9.23
109	7559	1188	8.65	127	8369	1998	9.26
110	7605	1234	8.69	128	8413	2042	9.29
111	7651	1280	8.73	129	8457	2086	9.32
112	7697	1326	8.77	130	8500	2129	9.35
113	7743	1372	8.80	131	8544	2173	9.37
114	7788	1417	8.84	132	8587	2216	9.40
115	7833	1462	8.88	133	8631	2260	9.43
116	7879	1508	8.91	134	8675	2304	9.46
117	7924	1553	8.95	135	8717	2346	9.49

6. 特殊な軌道

6•1 円軌道

離心率の式を書き直すと

$$e^2=\sin^2\beta_0+(X-1)^2\cos^2\beta_0$$

となる。円軌道では，$e=0$ でなければならないから，

$$\beta_0=0 \quad で \quad X=1 \qquad \cdots\cdots(32)$$

が，そのための，必要にして充分な条件である。

$X=1$ から，半径 r_0 の円軌道を描くに必要な速さ v_{s0} が得られる。

$$v_{s0}^2=\frac{k}{r_0} \qquad \cdots\cdots(33)$$

この v_{s0} を使えば，まえの X は

$$X=v_0^2/v_{s0}^2 \qquad \cdots\cdots(34)$$

のようにも表わせる。

なお，$X=2$ のときは，β_0 にかかわらず $e=1$ であつて，軌道は放物線になる。この場合の速さを脱出速度といい，v_{E0} で表わす。

$$v_{E0}^2=\frac{2k}{r_0} \qquad \cdots\cdots(35)$$

したがつて一般に

$$v_E=\sqrt{2}\ v_s \quad\cdots\cdots(36)$$

第3表に，v_s と v_E とを高度 H に対して示した。

第 3 表

H (km)	v_s (km/sec)	v_E (km/sec)	H (km)	v_s (km/sec)	v_E (km/sec)
0	7.909	11.185	900	7.403	10.469
200	7.788	11.014	1000	7.353	10.399
300	7.729	10.930	1100	7.303	10.328
400	7.672	10.850	1200	7.255	10.260
500	7.616	10.771	1300	7.208	10.194
600	7.561	10.693	1400	7.161	10.127
700	7.507	10.616	1500	7.116	10.063
800	7.455	10.543	1600	7.071	10.000

6•2　$\beta_0=0$ の場合

このときは，(13) から

$$e=\pm(X-1)$$

を得る。

$X<1$ であれば，$e=1-X$ となり，

$$\frac{r_a}{r_0}=1,\quad \frac{r_p}{r_0}=\frac{X}{2-X}=\frac{1-e}{1+e}\quad\cdots\cdots(37)$$

$X>1$ であれば，$e=X-1$ となり

$$\frac{r_a}{r_0}=\frac{X}{2-X}=\frac{1+e}{1-e},\quad \frac{r_p}{r_0}=1\quad\cdots\cdots(38)$$

すなわち，$X<1$ のときは，出発点 ($r=r_0$) が遠地点になり，$X>1$ のときは近地点になるわけである。

なお，出発点が遠地点になつている場合に，その近地点までの距離が地球半径より大きいためには，(37) から

$$\frac{X}{2-X}r_0>R$$

変形すれば

$$\frac{2}{1+\frac{r_0}{R}}<X<1\quad\cdots\cdots(39)$$

の条件を得る。あるいは，r_0 の代りに，地表からの高さ H_0 を使えば ($r_0=R+H_0$)，

$$\frac{1}{1+\frac{H_0}{2R}}<X<1\quad\cdots\cdots(40)$$

6•3　$X=1$ の場合

このときは，(17) から

$$a=r_0 \cdots\cdots(41)$$

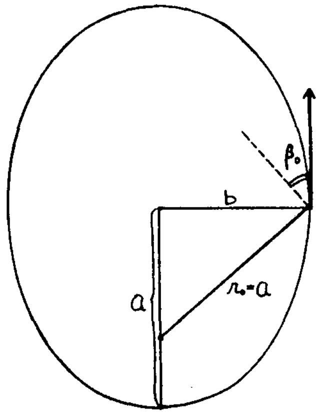
を得る。したがつて，出発点は，ちょうど短半径の頂点になつている。また，(13) と (14) とから

$$\left.\begin{aligned} e&=\sin\beta_0 \\ \tan\varphi&=-\cot\beta_0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(42)$$

を得る。

したがつて　$\varphi=\frac{\pi}{2}+\beta_0$ である。

なお (17) からは，$X<1$ であれば $a<r_0$, $X>1$ であれば $a>r_0$ ということがわかる。したがつて，出発点から地球中心を見ると，$X<1$ ならば，それは楕円の遠い方の焦点になつており，$X>1$ ならば，近い方の焦点になつている。



第 5 図